OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XI-A

1. a) Să se arate că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A^3=2A+I_2$, dar că doar două dintre ele au toate elementele numere naturale.

b) Să se arate că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ cu proprietatea $A^3=2A$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

2. Considerăm o matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$ care are următoarele proprietăți:

(1) A și A^3 au pe diagonala principală elementele $-1,0,1$ în această ordine;

(2) A^2 are pe diagonala principală elementele $1,0,1$ în această ordine.

Demonstrați că A este singulară, dar are cel puțin un minor de ordin 2 nenul.

Cristi Săvescu, București

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_{n+2}=x_{n+1}\cdot x_n^2$, $\forall n\geq 0$. Aflați termenul general x_n al șirului și apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Alexandru Gabriel Mîrșanu, Iași

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}-\sqrt{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}}{\sqrt[3]{1+\ln\left[x(2x-1)\right]}-\sqrt[3]{1+\ln\left(x^3-4x+4\right)}}$.

Iulian Danielescu, Brăila